

23/03/17. Φύλλο #2.

Γ: Αν $A, B \in F^{n \times n}$ τότε AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιότητες
από: λόγω συμμετρίας, αρκεί να δείξω
Αν $\lambda \in F$ ιδιοτιμή του AB τότε λ είναι ιδιοτιμή κ' BA

Υπενθύμιση: λ ιδιοτιμή του $C \Leftrightarrow \det(C - \lambda I_n) = 0 \Rightarrow C - \lambda I_n$ όχι αντιστρέψιμο
 $\Leftrightarrow \forall \lambda (\lambda) \neq \{0\}$
 $\Rightarrow$ υπάρχει $v \in F^{n \times 1}$ μη μηδενικό με $Cv = \lambda v$.

Υπενθύμιση: 0 ιδιοτιμή του $C \Leftrightarrow \det(C) = 0 \Leftrightarrow C$ όχι αντιστ.

Παρατηρώντας: $\lambda = 0$ ιδιοτιμή του $AB \Rightarrow AB$ όχι αντιστ.
 $\Rightarrow \det(AB) = 0 \Rightarrow \det A \cdot \det B = 0 \Leftrightarrow \det A = 0$ ή $\det B = 0$
 $\Rightarrow \det(BA) = 0 \Rightarrow 0$ ιδιοτιμή του BA

Παρατηρώντας: $\lambda \neq 0$. Τότε υπάρχει $v \in F^{n \times 1}$ μη μηδενικό με $AB \cdot v = \lambda v$
Αλλά $\lambda \neq 0$ και $v \neq 0 \Rightarrow \lambda v \neq 0 \Rightarrow Bv \neq 0$

$$\text{Έχουμε } (BA)(Bv) = B(ABv) = B(\lambda v) = \lambda(Bv) \quad (*)$$

και είδαμε $Bv \neq 0$. Από η $(*) \Leftrightarrow \lambda$ ιδιοτιμή του BA
(ένα ιδιοδιάνυσμα το Bv)

Δείξαμε όταν $\lambda \neq 0$, λ ιδιοδιάνυσμα για του AB με
ιδιοτιμή λ , τότε Bv — " — BA με
ιδιοτιμή λ .

#2

5.) Δίνονται $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ διαγωνίσιμος;

$$\leadsto \chi_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2-x^2 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = -(2-x^2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 3 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} =$$

$$= -(2-x^2)(x^2-3) = (x^2-2)(x^2-3) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$

Άρα το $\chi_A(x)$ αναλύεται στο $\mathbb{R}[x]$ σε γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων. Από πρόταση 1Α διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{R}$.

4.) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

- Δείξτε A διαγωνίσιμος.
- Βρείτε $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ αντιστ. τέτοια ώστε $P^{-1}AP = \text{διαγώνιο}$.
- Υπολογίστε το $A^m \forall m \geq 1$.

$$\leadsto \chi_A(x) = \det(A - xI_3) = \begin{vmatrix} 3-x & 0 & -1 \\ 0 & 2-x & 0 \\ -1 & 0 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$$= (2-x) \begin{vmatrix} 3-x & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (2-x) \begin{vmatrix} 3-x & -1 \\ -1 & 3-x \end{vmatrix} = (2-x)(x^2-6x+8) = (2-x)^2(x-4).$$

ΔΙΟΤΙΜΗ	ΑΛΓ. ΠΟΛ/ΤΑ	ΓΕΩΜ. ΠΟΛ/ΤΑ
2	2	
4	1	

2

Υπολογίζουμε διάνυσμα $v_A(2)$

$$(A - 2I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbb{O}_{3 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - z = 0$$

$$\text{Αρα } v_A(2) = \left\{ \begin{bmatrix} z \\ y \\ z \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} = z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Βάση του $v_A(2)$ γιανι είναι Γ.Α.

$$\text{Υπολογίζουμε } v_A(4): (A - 4I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

μετά τις πράξεις ο $v_A(4)$ έχει βάση

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ έχουμε } g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, g_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$v_A(2), v_A(4)$

$$P = [g_1 | g_2 | g_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Από θεωρ. } P^{-1}AP = D \quad (*)$$

$$\text{iii.) } (*) \Rightarrow A = P D P^{-1} \text{ Αρα } \forall m \geq 1$$

$$A^m = P D^m P^{-1} = P \begin{bmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{bmatrix} P^{-1}$$

Υπολογίζουμε

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Αρα } A^m = \begin{bmatrix} \frac{2^m + 4^m}{2} & 0 & \frac{2^m - 4^m}{2} \\ 0 & 2^m & 0 \\ \frac{2^m - 4^m}{2} & 0 & \frac{2^m + 4^m}{2} \end{bmatrix}$$

Εκθετική συνάρτηση: $\exp: \mathbb{R}^{v \times v} \rightarrow \mathbb{R}^{v \times v}$

Ορισμός: Έστω $A_k = (a_{ij})_{i,j=1}^v$ ακολουθία στοιχείων του $\mathbb{R}^{v \times v}$
και $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{v \times v}$

(Π.1) $A_k = \begin{bmatrix} 1/k & 1 \\ 0 & 2+1/k^2 \end{bmatrix}$ Λέμε $\lim_k A_k = B$ αν για κάθε i, j η ακολουθία

πραγματικών αριθμών $(a_{ij})_{k \geq 1}$ συγκλίνει στο b_{ij}

$$\text{Στο (Π.1)} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Πρόταση: Έστω $A \in \mathbb{R}^{v \times v}$ θέτουμε $S_k = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^k}{k!}$. Τότε υπάρχει μοναδικός πίνακας που συμβολίζουμε $\exp(A)$ ή $e^A \in \mathbb{R}^{v \times v}$.

$$\text{ώστε } \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = e^A$$

Περίπτωση 1) Αν $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ βλέπουμε $e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$

Περίπτωση 2) Έστω A διαγωνίσιμος / A και $P \in \mathbb{R}^{v \times v}$ αντιστρέψιμος, ώστε

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_v \end{bmatrix}$$

$$\text{Τότε } P^{-1}A^k P = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_v^k \end{bmatrix} \text{ και στο όριο έχουμε } P^{-1}e^A P = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_v} \end{bmatrix}$$

$$\text{Άρα } e^A = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_v} \end{bmatrix} P^{-1}$$

Περίπτωση 3) A όχι διαγωνίσιμος δεν μας απλοχτεί

Φολλόδιο 4:

5) Βρείτε το e^A όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 4 & 3-x \end{vmatrix} = x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5).$$

Διοριστή Αλγεμπλικά Γεωμ. πινάκ

1 1 1

5 1 1

Υπολογίζω $V_A(-1)$

$$(A - (-1)I_2) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow x+y=0$ Άρα το $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ είναι του $V_A(-1)$

Υπολογίζω $V_A(5)$

$$(A - 5I_2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x - y = 0$$

Άρα $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ είναι του $V_A(5)$

$$\text{Συνεπώς } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ και } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow e^A = P \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^5 \end{bmatrix} P^{-1}$$

ΛΗΡΟΝΟΜΟΣ. ΓΡΑΜ. ΕΝΔΟΜΟΡΦΙΣΜΟΣ.

Έστω F σώμα, $V \neq \{0\}$ πεπερ. διόριστος διαν. χώρος $/F$
και $f: V \rightarrow V$ γραμ. ενδομορ. του V , δηλ. f γραμμική

Υπενθύμιση Έχουμε πιά το χαρακτηριστικό πολυνο
 $\chi_f(x) \in F[x]$

Ορίζουμε λοιπ ιδιοτιμή της f αν λ ρίζα του $\chi_f(x)$

Ορισμός: Έστω λ ιδιοτιμή του f . Ορίζουμε τον ιδιοχώρο $V_f(\lambda)$ της f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda \in F$ ως εξής

$$V_f(\lambda) = \ker(f - \lambda \text{id}_V)$$

Ηρα $V_f(\lambda)$ διανυσμ. υπόχωρος του V .

(Π.Χ) Έστω $V = \mathbb{R}[y] = \{a_0 + a_1 y \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$

$T: V \rightarrow V$ η γραμμική απεικόνιση με $T(p(y)) = p'(y)$

Βρείτε $\chi_T(x) \in \mathbb{R}[x]$, τις ιδιοτιμές και τους ιδιοχώρους του T

~ Έστω $g = (g_1 = 1, g_2 = x)$ η κανονική βάση του V . Θέτουμε
 $A = [T]_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Συνεπώς $\chi_T(x) = \chi_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 0 & -x \end{vmatrix} = -x^2$

Επομένως η T έχει γραμμική ιδιοτιμή $\lambda = 0$ με αλγ. πολ. 2.

Υποχώρος $V_T(0) = \ker(T - 0 \text{id}_V) = \ker T =$

$$= \{a_0 + a_1 x \in V \mid T(a_0 + a_1 x) = 0\} = \{a_0 + a_1 x \in V \mid a_1 = 0\}$$

= σύνολο γραμμικών πολλώνων

$\dim V_T(0) = 1$, γιατί έχει βάση το g_1 .

Ορισμός: Το $v \in V$ λέγεται ΙΣΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑ της T αν $v \neq 0_V$ και υπάρχει $\lambda \in F$ με $Tv = \lambda v$.

Φανερά v ιδιοδ. $\Leftrightarrow v \neq 0_V$ και υπάρχει ιδιοτιμή λ της T . $v \in V_T(\lambda)$ με $v \in V_T(\lambda)$.

Ηρα σύνολο ιδιοδιανυσμάτων της T = παίρνουμε την ένωση των ιδιοχώρων $V_T(\lambda)$ για όλες τις ιδιοτιμές του T .
 και εστιάσουμε το 0_V .

Παράδειγμα: Στροφή κατά τη γωνία ϕ .

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$T: V \rightarrow V$$

καταστροφικός ως προς

τον άξονα των x .

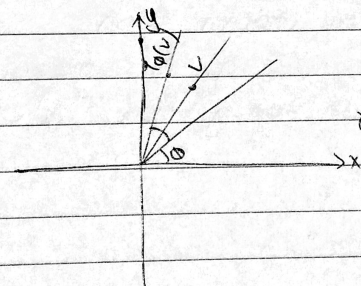
T γραμμική. Ποια είναι τα ιδιοδιάνυσματα της T (και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές)

→ Τα μη μηδενικά σημεία του άξονα των x , με ιδιοτιμή 1 και τα μη μηδενικά σημεία του άξονα των y , με ιδιοτιμή -1

Στροφές $\phi \in [0, 2\pi]$

περίπτ. 1.) $\phi = 0$ τότε $\phi = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$, για κάθε μη μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}^2$ είναι ιδιοδιάνυσμα με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\lambda = 1$

περίπτ. 2.) $\phi \in (0, 2\pi)$, $T_\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ στροφή κατά ϕ .



περίπτ. 1.) $\phi \neq \pi$.

Δεν υπάρχει ιδιοτιμές & ιδιοδιαν.
γιατί για $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ τα σημεία $0, v, T_\phi(v)$
δεν είναι συνευθειακά.

• v περίπτ. 2.)

$\phi = \pi$ κάθε $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ είναι ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή -1

$$T_\pi v = -v$$

Παράδειγμα: Έστω $n \geq 1$, $V = \mathbb{R}_n[y]$, $T: V \rightarrow V$, $T(p(y)) = p'(y)$

Έστω $0 \neq p(y) \in V$ ιδιοδιάνυσμα. Τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέ-
 $T(p(y)) = \lambda p(y) \Rightarrow p'(y) = \lambda p(y)$ (*)

Αν $p(y) \neq 0$, $\deg p'(y) = \deg p(y) - 1$ από (*)
αντίφαση. Συμπεράσμα: Αν $p'(y) \neq 0$ το $p(y)$ όχι ιδιοδιάνυσμα
Περίπτωση 2: $p(y) \neq 0$ αλλά $p'(y) = 0$ δηλ $p(y)$ σταθερό
Τότε $p(y)$ = ιδιοδια. της T με ιδιοτιμή $\lambda = 0$.

Άρα σύνολο ιδιοδιανυσμάτων = σύνθ. μη μηδενικά πολυνομ.

$$\text{Σύνολο ιδιοτιμών} = \{0\}$$

Μόνος ιδιότυπος $V_T(0)$ = σταθερά πολυνομ.

$$\text{όρα } \dim V_T(0) = 1.$$

Ορισμός: Έστω F σώμα, $V \neq \{0\}$ δ.χ. / F πεπερ. διαστάσης, $T: V \rightarrow V$
γραμ. ε.δ.α. του V .

Ο T λέγεται διαγωνίσιμος αν υπάρχει βάση

$g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ του V ώστε κάθε g_i ιδιοδιάνυσμα του T .

Έστω T διαγ. και λ_i η ιδιοτιμή του g_i , όρα $T(g_i) = \lambda_i \cdot g_i$. Τότε

$$[T]_g^g = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Συμπεράσμα: ο T είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν

υπάρχει βάση g του V ώστε $[T]_g^g$ διαγώνιος. Τότε

αναγκαστικά τα g_i ιδιοδιαν. του T και τα διαγώνια στοι-
χεία του $[T]_g^g$ ιδιοτιμές της T .

Πρόταση:

Έστω $n=(n_1, \dots, n_r)$ βάση του V και $T: V \rightarrow V$ γραμ. ενδομορ.
Τότε T διαγωνισμός $\Leftrightarrow [T]_n^n$ διαγωνισμός

Επομένως για να ελεγχουμε ένας γραμ. ενδομορ. είναι διαγωνισμός αρκεί να περάσουμε στο πίνακα του.

Πρόβλημα 3

2.) Πότες συνθήκες πρέπει να πληρούν οι a, b ώστε ο γραμ. ενδομορ. $T: \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ με $T(x, y, z) = (2x, 2y + az, 3x + bz)$ να είναι διαγωνισμός;

$\leadsto$ Έστω $e = (e_1, e_2, e_3)$ η κανονική βάση του $\mathbb{Q}^3$ θέτουμε

$$A = [T]_e^e = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 3 & 0 & b \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & a \\ 3 & 0 & b-x \end{vmatrix} = (2-x) \begin{vmatrix} 2-x & a \\ 0 & b-x \end{vmatrix} = -(x-2)^2 (x-b)$$

Δύο περιπτώσεις: $b \neq 2$ ή $b = 2$

$b \neq 2$

1 διότιμος | αλγ. πολ/τα | γεω. πολ/τα

Συνεχίζω
στο επόμενο
φάσθημα.